1. Функція f – ЧРФ, але не РФ. Область визначення функції

g(x) = μy(f(y) = x)

є ПРМ. Довести.

**Доведення**

Із рівності g(x) = y(f(y) = x) випливає, що область визначення функції g(x) буде співпадати з областю значень функції f, бо f(y) = x. Тоді алгоритм обчислення характеристичної функції множини значень функції f є таким:

function (x, g)

begin

if f(x) = g

then = 0

else = 1

end.

Де function (x, g) є ПР, а отже область значень функції є ПРМ. Оскільки область значень f співпадає з областю визначення функції g, то це також ПРМ. Доведено.

1. **с**(x,y,z) = **c**(**c**(x,y),z) – бієкція. Довести.

**Доведення**

За властивістю нумерації Кантора (x,y) <=> k.

Візьмемо c(x, y) = n, тоді (k,z) <=> m.

Покажемо що:

1. Для кожного (x,y,z) існує єдине (за власт. бієкції) W, що відповідає c(c(x,y),z) c(x,y) = k. Для цього співвідношення k – єдине, тому оскільки нумерація Кантора є бієкцією з N^2 в N, то c(k,z) = W.
2. Для W існують єдині (x,y,z) що відповідають c(c(x,y),z) = W, тому що z = r(W), k=l(W), x=l(k), y=r(k) => z=r(W), y=r(r(W)), x=l(r(a))

Перелічені вище властивості є достатніми для того, аби сказати, що така нумерація є бієкцією.

1. f(x) = ∞ – ЧРФ. Довести.

**Доведення**

За означенням функція ЧРФ існує, якщо існує алгоритм, що її обчислює.

Контрприклад:

function *f*(*х*)

begin

*i* := 0

while *f*(*i*) >= *0*

do *i* := *i* + 1

*f* := *f* (*i*)

end.

Отже, функція є ЧРФ. Доведено.

1. Існує ПРФ одного аргументу з нерекурсивною областю значень. Довести.

**Доведення**

За теоремою 5.3:

Якщо ПРФ є монотонно зростаючою функцією, то її область визначення є ПРМ.

Визначимо ПРФ, яка є монотонно спадною, тобто f(x) <= x.

Нехай f(x) = а∸х, де а – довільне натуральне число. Дана функція є ПРФ, оскільки безпечна різниця є ПРФ, але її область значень не є ПРМ, оскільки неможливо підібрати таку характеристичну функцію, що буде ПРФ, тому що характеристична функція буде працювати нескінченно при х > а. Доведено.

1. Функція

не є ЧРФ. Довести.

**Доведення**

Припустимо, що існує алгоритм, який обчислює значення цієї функції. Подаємо на вхід цього алгоритму x.

Якщо w(x) = 0, то K(x,x) > 1.

Якщо w(x) = 1, то K(x,x) <= 1 або не визначена в точці (x,x), тобто область визначення функції K (x,x) є рекурсивною.

Що не є істинним, a отже наше припущення хибне, тому w(x) не є ЧРФ.